CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2
MINES 92

M.TARQI[1] CPGE KHOURIBGA-MAROC (alkendy.x10.mx)

PREMIÈRE PARTIE
Étude des matrices de rang 1

I.1 Factorisation des matrices de rang 1

a) m est de rang 1 si, et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$, $m(x) = \lambda_x a$. Il est clair que $u : x \longmapsto \lambda_x$ est une forme linéaire non nulle. Réciproquement toute application de la forme précédente est une application linéaire de rang 1.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice de m dans cette base s'écrit :
$$M = \begin{pmatrix} u(e_1)a_1 & u(e_2)a_1 & \dots & u(e_n)a_1 \\ u(e_1)a_2 & u(e_2)a_2 & \dots & u(e_n)a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(e_1)a_n & u(e_2)a_2 & \dots & u(e_n)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(e_1) \\ u(e_2) \\ \vdots \\ u(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = X^tY,$$
où $X =^t (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ et $Y = a =^t (a_1, a_2, \dots, a_n)$.
EXEMPLE : On sait que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ (définition de la base duale), donc $M = E_{ij}$, la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

b) D'après la question 1. M est de rang 1 si, et seulement si, $M = X^tY$ où X et Y sont des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.

c) Si $M = X^tY = X'^tY'$, alors ${}^tXX^tY =^t XX'^tY'$ donc Y et Y' sont liés, de même pour X et X'.

I.2 Rang d'une famille de matrices de rang 1

a) Soit $M = (m_{ij})_{(1\le i,j\le n)}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}$ où M_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément situé à l'intersection de la colonne i et de la ligne j et égal à m_{ij}. Donc M est somme de matrices de rang 1.

b) Notons $Y_j = \begin{pmatrix} y_j^1 \\ y_j^2 \\ \vdots \\ y_j^n \end{pmatrix}$ et $X_j = \begin{pmatrix} x_j^1 \\ x_j^2 \\ \vdots \\ x_j^n \end{pmatrix}$ pour $j = 1, 2, ..., n$. Soit $(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n}$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}X_i^tY_j = 0$ ceci entraîne que pour tout $k = 1, 2, ..., n$ $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}y_j^k)X_i = 0$ et comme les $(X_i)_{1\le i\le n}$ sont libres alors $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}y_j^k = 0$ et donc $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}Y_j = 0$ et par conséquent $\alpha_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j).

c) En changeant au besoin le numérotage on peut supposer que $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$ sont linéairement indépendants, de même on peut supposer aussi que $\{V_1, V_2, ..., V_s\}$ sont linéairement indépendants. D'après la question précédente on peut montrer que la famille $(U_iV_j)_{1\le i\le r, 1\le j\le s}$ est libre.
Si $\mathrm{rg}(U_iV_j) > rs$ on aura $\mathrm{rg}(U_i) > r$ ou $\mathrm{rg}(V_j) > s$ ce qui est absurde, donc $\mathrm{rg}\{U_iV_j/i = 1, 2, ..., p, j = 1, 2, ..., q\} = rs = \mathrm{rg}(U_i)\,\mathrm{rg}(V_j)$.

I.3 Orthogonalité des matrices de rang 1 dans $(E, ((.|.)))$.

1. Pour vos remarques n'hésitez pas à m'écrire, et surtout n'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées dans ce document (medtarqi@yahoo.fr).

a) Les matrices X^tY et X'^tY' sont orthogonaux dans $(E, ((.|.)))$ si, et seulement si,
$$((X^tY|X'^tY')) = \mathrm{tr}(^t(X^tY)X'^tY') = 0.$$
Or
$$\mathrm{tr}(^t(X^tY)X'^tY') = \mathrm{tr}(Y^tXX'^tY') =^t XX' \,\mathrm{tr}(Y^tY') =^t XX'^tYY' = (X|X')(Y|Y')$$
ainsi X^tY et X'^tY' sont orthogonaux si, et seulement si, X et X' ou bien Y et Y' sont orthogonaux.

b) Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, alors $(X_i^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, on sait déjà que la famille de n^2 éléments $(X_i^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est libre, de plus
$$((X_i^tY_j|X_k^tY_m)) = (X_i|X_k)(Y_j|Y_m) = \delta_{ik}\delta_{jm}.$$

I.4 Matrices diagonalisables de rang 1

a) On $A^2 = (X^tY)(X^tY) = X(^tYX)^tY = (^tYX)X^tY = aA$, donc A est racine du polynôme $X(X-a)$, c'est le polynôme minimal de A ($A \neq 0$ et $A \neq aI_n$). Donc 0 et a sont exactement les valeurs propres de A.

b) D'après le cours A est diagonalisable si, et seulement si, $a = \mathrm{tr}(A)$ est non nul.

c) On a $a = \mathrm{tr}(A) =^t YX = 1 + \alpha$, donc A est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha \neq -1$.

d) Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Y_j)_{1\leq j\leq n}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$ telles que $^tY_jX_i \neq 0$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, donc les matrices $(X_i^tY_i)_{1\leq i,j\leq n}$ sont diagonalisables et forment une base de E.

DEUXIÈME PARTIE
Étude d'un endomorphisme

II.1 Rang de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$

Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, donc $\forall M \in E$, il existe une famille de scalaires $(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle $M = \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}X_i^tY_j$. Donc
$$\phi_{A,B}(M) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}AX_i^tY_jB = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(AX_i)^t(BY_j).$$
Donc la famille $((AX_i)^t(BY_j))_{1\leq i,j\leq n}$ engendre $\mathrm{Im}\phi_{A,B}$.
Ainsi $\dim \mathrm{Im}\phi_{A,B} = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$ d'après la question II 3. de la première partie, donc $\mathrm{rg}\,\phi_{A,B} = rs$.

II.2 Vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$

a) Soient λ et μ des scalaires tels que $AV = \lambda V$ et $BW = \mu W$. On donc
$$\phi_{A,B}(V^tW) = \lambda\mu(V^tW),$$
donc V^tW est un vecteur propre de $\phi_{A,B}$.

b) Soit X^tY une matrice de rang 1 qui appartient au noyau de $\phi_{A,B}$. Donc $\phi_{A,B}(X^tY) = 0$ et donc $(AX)^t(BY) = 0$, donc $AX = 0$ ou bien $BY = 0$ ou encore $X \in \ker A$ ou $Y \in \ker B$.
Réciproquement, pour tous les vecteurs X et Y qui vérifient $X \in \ker A$ ou $Y \in \ker B$, on a $X^tY \in \ker \phi_{A,B}$.

c) Soit X^tY une matrice de rang 1 vecteur propre de $\phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $\mu \neq 0$, alors on a $\phi_{A,B}(X^tY) = \mu X^tY$, c'est-à-dire $(AX)^t(BY) = X^tY$, donc AX et μX sont colinéaires, donc même pour BY et μY (d'après la question I-3), donc X est un vecteur propre de A et Y est un vecteur propre de B.

d) Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Y_j)_{1\leq j\leq n}$ deux bases de vecteurs propres associées respectivement à A et B. Soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\mu_j)_{1\leq j\leq n}$ des scalaires tels que $AX_i = \lambda_iX_i$ et $BY_j = \mu_jY_j$. Alors $\phi_{A,B}(X_i^tY_j) = \lambda_i\mu_j(X_i^tY_j)$, donc $X_i^tY_j$ est un vecteur propre de $\phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $\lambda_i\mu_j$.
Donc $(X_i^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base (d'après la question I-2) de vecteurs propres de $\phi_{A,B}$, donc $\phi_{A,B}$ est diagonalisable et $\mathrm{tr}(\phi_{A,B}) = \sum\limits_{i,j} \lambda_i\mu_j = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$.

e) A et B ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$ car $\pi_A = \pi_B = X^2$, donc le résultat de la question précédente n'est pas applicable. Pour cela cherchons la matrice de $\phi_{A,A}$ dans la base
$$\mathscr{B} = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
On trouve les relations $\phi_{A,B}(E_{11}) = E_{22},\ \ \phi_{A,B}(E_{12}) = -E_{21},\ \phi_{A,B}(E_{21}) = -E_{12}$ et $\phi_{A,B}(E_{22}) = E_{11}$, d'où la matrice de $\phi_{A,B}$:
$$M(\phi_{A,B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On voit bien que cette matrice est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable, on remarque aussi que $X^2 - 1$ est le polynôme minimal de $\phi_{A,B}$, donc les valeurs propres de $\phi_{A,B}$ sont 1 et -1. Les calcules donnent : $E_1 = \text{Vect}(I_2, E_{12} - E_{21})$ et $E_{-1} = \text{Vect}(E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21})$.

II.3 Propriétés d'orthogonalité de $\Phi_{A,B}$

a) Soit $M = N = X^tY$ une matrice de rang 1. La relation $\varphi\left(\Phi_{A,B}(M)|\Phi_{A,B}(N)\right) = \varphi(M|N)$ est équivalente à $\text{tr}(BY^t(AX)AX^tY^t(BY) = \text{tr}(^tXXY^tY)$ ou encore
$$^t(AX)(AX)^t(BY)BY =^t XX^tYY.$$
D'où $|AX|^2.|BY|^2 = |X|^2.|Y|^2$. Ainsi $|AX|.|BY| = |X|.|Y|$.

b) Si A et B sont orthogonales, alors $\phi_{A,B}$ est orthogonal sur E.

TROISIÈME PARTIE

Expression d'une matrice M de rang r à l'aide de matrices de rang 1

III.1 Valeurs propres de l'endomorphisme $m^* \circ m$:
D'après le cours $\text{rg}(m^*) = \text{rg}(m)$ et $\text{rg}(m^* \circ m) = \text{rg}(m^*) = \text{rg}(m) = r$. L'endomorphisme $m^* \circ m$ étant symétrique réel et positive, donc il existe une base orthonormée $(v_i)_{1 \le i \le n}$ formée de vecteurs propres de $m^* \circ m$ (théorème spectral), de plus les valeurs propres de $m^* \circ m$ sont positives. Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ les valeurs propres de $m^* \circ m$, en changeant au besoin le numérotage, on peut supposer $0 < \alpha_r < ... < \alpha_2 < \alpha_1$ et $\alpha_{r+1} = ... = \alpha_n = 0$ si $r < n$.

III.2 a) On a $m^* \circ m(v_i) = \alpha_i v_i$ et donc $(m^* \circ m(v_i)|v_j) = \alpha_i(v_i|v_j)$ ou encore $(m(v_i)|m(v_j)) = \alpha_i(v_i|v_j) = \alpha_i\delta_{ij}$, donc les vecteurs $m(v_i)$ sont deux à deux orthogonaux.
En particulier $|m(v_i)|^2 = (m(v_i)|m(v_i)) = \alpha_i(v_i|v_i) = \alpha_i$, d'où $|m(v_i)| = \sqrt{\alpha_i}$.

b) Posons $Y_i = \dfrac{Mv_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, les vecteurs $(Y_i)_{1 \le i \le r}$ sont orthonormés, donc il existe $Y_{r+1}, ..., Y_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $(Y_1, ..., Y_r, Y_{r+1}, ..., Y_n)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (on peut utiliser par exemple Gram-Schmidt). Posons ensuite Z_i le vecteur colonne associé à v_i, les deux bases ainsi construites sont orthonormées.
Soit $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i$. Pour tout $1 \le j \le n$, on a
$$g(Z_j) = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i Z_j = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i}\,^t Z_i Z_j Y_i = \sqrt{\alpha_j} Y_j = Mv_i.$$
D'où
$$M = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i$$

QUATRIÈME PARTIE

Approximation d'une matrice de rang r par une matrice de rang inférieur s dans $(E, ((.|.)))$

IV.1 Résolution de problème d'approximation

a) Posons $N=\sum_{i=1}^{s}\sqrt{\alpha_i}Y_i^tZ_i$, $s<r$. On a clairement

$$\mathrm{Im}(N)\subset \mathrm{Im}(Y_1^tZ_1)+...+\mathrm{Im}(Y_s^tZ_s),$$

les sous-espaces $\mathrm{Im}(Y_i^tZ_i)$ sont des droites vectorielles, donc $\mathrm{rg}(N)\leq s$.

Comme $N\in R_s$,

$$\begin{aligned} d^2(M,R_s) &\leq \|M-N\|^2\\ &= \|\sum_{i=s+1}^{r}\sqrt{\alpha_i}Y_i^tZ_i\|^2\\ &= \sum_{i=s+1}^{r}\alpha_i\|Y_i^tZ_i\|^2 \end{aligned}$$

car la famille $(Y_i^tZ_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthonormée.

D'où

$$d(M,R_s)\leq\sqrt{\sum_{i=s+1}^{r}\alpha_i}=(\alpha_{s+1}+...+\alpha_r)^{\frac{1}{2}}.$$

b) Soit N une matrice de rang q avec $q\leq s<r$.

$$\begin{aligned} \|M-N\|^2 &= \mathrm{tr}({}^t(M-N)(M-N))\\ &= \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\geq\sum_{i=1}^{n-q}\gamma_i\\ &\geq \sum_{i=1}^{n-q}\alpha_{i+q}=\sum_{i=q+1}^{n}\alpha_i\\ &\geq \sum_{i=s+1}^{r}\alpha_i \end{aligned}$$

Donc $\|M-N\|\geq(\alpha_{s+1}+...+\alpha_r)^{\frac{1}{2}}$.

c) D'après la question précédente, on a

$$\forall N\in R_s,\quad(\alpha_{s+1}+...+\alpha_r)^{\frac{1}{2}}\leq\|M-N\|$$

D'où

$$(\alpha_{s+1}+...+\alpha_r)^{\frac{1}{2}}\leq\inf_{N\in R_s}\|M-N\|=d(M,R_s)$$

ce qui donne avec la question 1. de cette partie

$$d(M,R_s)=(\alpha_{s+1}+...+\alpha_r)^{\frac{1}{2}},$$

où les α_i sont les valeurs propres décroissantes de ${}^tMM$. Enfin, la matrice N donnée dans la question a. vérifie $\|M-N\|=d(M,R_s)$.

d) On sait qu'il existe une matrice M' de rang inférieur ou égal à s telle que $\|M-M'\|=d(M,R_s)$, donc, d'après la caractérisation des éléments adherents à une partie, $M\in\overline{R_s}$ (l'ensemble des points adhérents à R_s) si, et seulement si, $d(M,R_s)=0$ ou encore $\|M-M'\|=0$ donc $M'=M\in R_s$, par conséquent $R_s=\overline{R_s}$, donc R_s est fermé de E.

IV.2 Approximation par une matrice symétrique

a) En utilisant les propriétés de la trace, on obtient

$$((A|B))=\mathrm{tr}({}^tAB)=\mathrm{tr}({}^t({}^tAB))=\mathrm{tr}({}^tBA)=-\mathrm{tr}(BA)=-\mathrm{tr}({}^tAB),$$

on en déduit que $((A|B))=0$.

b) Soit $(v_1,...,v_n)$ une base orthonormée diagonalisant A, chaque vecteur v_i ayant Z_i comme matrice, alors ${}^tAA=A^2$ est aussi diagonalisable dans cette même base. On reprend la construction des suites (Y_i) et (Z_j) comme dans la question 1.a, avec Z_i le vecteur colonne associé à v_i, on aura alors $Y_i = \pm Z_i$ et A s'écrira

$$A = \sum_{i=1}^{n} \pm\sqrt{\alpha_i} Y_i^t Y_i$$

où les $\{\alpha_i / i \in [\![1, n]\!]\}$ désignent l'ensemble des valeurs propres (positives) de A^2, et on pourra prendre la matrice symétrique $U = \sum_{i=1}^{s} \mp\sqrt{\alpha_i} Y_i^t Y_i$.

On a alors

$$\|A - U\| = (\alpha_{s+1} + ... + \alpha_r)^{\frac{1}{2}} = (\lambda_{s+1}^2 + ... + \lambda_r^2)^{\frac{1}{2}}$$

c) Pour toute matrice V symétrique, on a

$$\|M - V\|^2 = \|(A - V) + B\|^2 = \|A - V\|^2 + \|B\|^2,$$

car les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonaux dans E pour le produit scalaire $((.|.))$, et donc minimiser $\|M - V\|^2$ revient à minimiser $\|A - V\|^2$. L'existence de V vient du b.qui donne aussi la valeur de $d(M, S_s)$:

$$d(M, S_s) = \sqrt{\lambda_{s+1}^2 + ... + \lambda_r^2 + \|B\|^2}$$

où les λ_i désignent les valeurs propres A comme dans la question b.

Enfin, il n'y a pas unicité de la matrice V, il suffit pour cela de prendre $M = I_n$ avec $n \geq 2$, $s < n$ alors toute matrice V diagonale contenant exactement s fois 1 sur la diagonale satisfait à la condition imposée.

• • • • • • • • • • •